Una introducción a la teoría de representaciones*

Luis Narváez Macarro
Depto. de Algebra, Univ. Sevilla

Introducción

Estas notas contienen la redacción de un minicurso de 4 sesiones impartido por el autor en el Departamento de Álgebra de la Universidad de Sevilla, durante el mes de febrero de 2000. El objetivo del curso era ofrecer una introducción rápida a la teoría de las representaciones complejas (finito dimensionales) de los grupos finitos y de las álgebras de Lie semisimples complejas (caso de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$).

Agradezco a I. Ojeda Martínez de Castilla y M.J. Soto Prieto el interés que mostraron al hacerse cargo de la redacción

1 Nociones básicas

Definición 1.1. *Sea G un grupo finito. Sea $k = \mathbb{C}$. Una representación de G es un par (V, ρ), donde V es un k-espacio vectorial y ρ es un homomorfismo de grupos*

$$\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V).$$

Recordemos que la k-álgebra de G se define como

$$k[G] = \bigoplus_{\sigma \in G} k \cdot \sigma = \{f \colon G \to k\},$$

con la multiplicación dada por

$$\left(\sum_{\sigma \in G} a_\sigma \cdot \sigma\right)\left(\sum_{\sigma \in G} b_\sigma \cdot \sigma\right) = \sum_{\tau \in G}\left(\sum_{\sigma \cdot \sigma' = \tau} a_\sigma b_{\sigma'}\right)\tau,$$

o en notación funcional, por la convolución

$$(f * g)(\tau) = \sum_{\sigma \in G} f(\sigma) g(\sigma^{-1}\tau).$$

*Notas redactadas por I. Ojeda Martínez de Castilla y M.J. Soto Prieto.

Observación 1.2. *Las representaciones de G se pueden considerar como $k[G]$-módulos, dando a V la estructura de $k[G]$-módulo con la multiplicación definida de la siguiente manera: si*

$$\mathbf{v} \in V, \qquad r = \sum a_\sigma \sigma \in k[G],$$

es

$$r \cdot \mathbf{v} = \sum a_\sigma \rho(\sigma)(\mathbf{v}).$$

1.1 Nociones

Observación 1.3. *Un subsespacio invariante o subrepresentación de V es un submódulo W; i.e., un subespacio vectorial $W \subset V$ verificando*

$$\rho(\sigma)(W) \subset W \qquad \text{para todo } \sigma \in G.$$

Observación 1.4. *Sean (V, ρ) y (W, λ) dos representaciones de G. Un homomorfismo de representaciones es un homomorfismo k-lineal $T \colon V \to W$ compatible con ρ y λ, i.e.,*

$$\begin{array}{rcll} T \cdot \rho(\sigma) & = & \lambda(\sigma) \cdot T & \quad \text{para todo } \sigma, \\ T(\sigma \cdot \mathbf{v}) & = & \sigma \cdot T(\mathbf{v}) & \quad \text{para todos } \sigma,\ \mathbf{v}, \end{array}$$

o lo que es lo mismo, un homomorfismo de $k[G]$-módulos. Nótese que en la segunda ecuación escribimos $\sigma \cdot \mathbf{v}$ en lugar de $\rho(\sigma)(\mathbf{v})$.

Naturalmente, $\ker T$ *e* $\operatorname{Img} T$ *son subrepresentaciones de V y W respectivamente.*

1.2 Algunas representaciones especiales

Observación 1.5. *Sean V, W dos representaciones de G (omitimos ρ y λ). Entonces* $\operatorname{Hom}_k(V, W)$ *es una representación de G de la siguiente forma: para todo $\sigma \in G$ y $\phi \in \operatorname{Hom}_k(V, W)$, es*

$$(\sigma \cdot \phi)(\mathbf{v}) = \sigma \cdot \phi(\sigma^{-1} \cdot \mathbf{v}).$$

Observación 1.6. *Se llama representación trivial (o unidad) a la dada por $V = k$, $\sigma(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\sigma \in G$, $\mathbf{v} \in k$. Esto es, $\rho(\sigma) = \mathrm{id}_k$.*

Observación 1.7. $V^* = \operatorname{Hom}(V, k)$ *es una representación. En efecto, Si V es una representación cualquiera y $W = k$ la representación trivial, por 1.5 y 1.6,* $V^* = \operatorname{Hom}(V, k)$ *es una representación definida por*

$$(\sigma \cdot \vartheta)(\mathbf{v}) = \vartheta(\sigma^{-1} \cdot \mathbf{v}).$$

Observación 1.8. *Sean V, W dos representaciones de G. Entonces $V \otimes_k W$ es una representación de G de la siguiente forma: para todo $\sigma \in G$ y $\mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W$, es*

$$\sigma \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = (\sigma \cdot \mathbf{v}) \otimes (\sigma \cdot \mathbf{w}).$$

Observación 1.9. *Recordemos que la acción de un grupo sobre un conjunto es una aplicación* $\rho\colon G \to \mathfrak{S}(X)$*, donde* $\mathfrak{S}(X)$ *es el conjunto de biyecciones de* X*. Una acción* $\rho\colon G \to \mathfrak{S}(X)$ *induce una representación* $\tilde{\rho}\colon G \to \mathrm{GL}(k^X)$*, donde* $k^X = \{f\colon X \to k\}$ *definida por*

$$\tilde{\rho}(\sigma)(\phi)(x) = \phi(\sigma^{-1} \cdot x), \qquad \textit{para todo } x \in X.$$

Ejemplo 1.10. *Supongamos que* $X = G$*. Entonces la acción por traslación de* G *sobre sí mismo dada por* $\rho(\sigma)(x) = \sigma \cdot x$ *induce la* representación adjunta *de* G*. Análogamente, la acción por automorfismo interno* $\rho(\sigma)(x) = \sigma \cdot x \cdot \sigma^{-1}$ *induce la* representación interna *de* G*.*

2 Descomposición en representaciones irreducibles

Definición 2.1. *Una representación se dice irreducible si no tiene ninguna subrepresentación no trivial, es decir, si es un* $k[G]$*-módulo simple.*

Un ejemplo trivial de representación irreducible es k.

Definición 2.2. *Una representación* V *se dice completamente reducible si es suma directa de representaciones irreducibles.*

Ejemplo 2.3. *Sea* $V = \mathbb{C}^2$*. Pongamos* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ *la base canónica de* V*. Sea* $\rho\colon \mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V)$ *dada por* $\rho(n) = A^n$*, donde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta representación no es irreducible, porque $W = \langle \mathbf{e}_2 \rangle \subset V$ *es una subrepresentación no trivial.*

Teorema 2.4 (Reducibilidad completa de los grupos finitos). *Toda representación compleja (o en un cuerpo de característica* 0*) de dimensión finita de un grupo finito es completamente reducible.*

Recordemos que un espacio vectorial hermítico es un espacio V dotado de una forma hermítica, es decir, una forma $\langle , \rangle\colon V \times V \to \mathbb{C}$ bilineal para la suma y que además verifica

- $\langle \alpha\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \bar{\alpha}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
- $\langle \mathbf{v}, \alpha\mathbf{w} \rangle = \alpha\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
- Para todo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, es $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}$ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$.

Definición 2.5. *Una representación unitaria es una representación* (V, ρ)*, tal que* V *es hermítico y la forma hermítica* $\langle , \rangle$ *es compatible con la estructura de* $k[G]$*-módulo, es decir,*

$$\langle \sigma \cdot \mathbf{v}, \sigma \cdot \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle, \qquad \textit{para todo } \sigma \in G \textit{ y todos } \mathbf{v},\, \mathbf{w} \in V\,.$$

Demostración. Hay dos formas de demostrar el Teorema: usando, bien representaciones unitarias, bien proyectores.

- Supongamos que V es una representación unitaria. Demostraremos el resultado por inducción sobre la dimensión de V. Si la dimensión es 1 o si V es irreducible, no hay nada que decir. Si la dimensión es mayor y V no es irreducible, sea $W \subset V$ una subrepresentación no trivial (naturalmente, también es unitaria). Entonces, $W^{\perp}$ también es invariante. En efecto, si $\mathbf{v} \in W^{\perp}$ y $\sigma \in G$ es $\sigma \cdot \mathbf{v} \in W^{\perp}$, pues $\langle \sigma \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \sigma^{-1} \cdot \mathbf{w} \rangle = 0$, porque $\sigma^{-1} \cdot \mathbf{w} \in W$.

  Así, $V = W \oplus W^{\perp}$. Como las dimensiones de W y $W^{\perp}$ son menores que la dimensión de V, por la hipótesis de inducción, son sumas directas de subespacios invariantes. Por tanto, también lo es V.

  Supongamos ahora que (V, ρ) no es una representación unitaria, y $W \subset V$ una subrepresentación. Sea $\langle , \rangle$ una forma hermítica en V, y definamos la siguiente forma hermítica:

  $$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle' = \sum_{\sigma \in G} \langle \sigma \cdot \mathbf{v}, \sigma \cdot \mathbf{w} \rangle.$$

  Esta nueva forma promediada verifica que

  $$\langle \tau \mathbf{v}, \tau \mathbf{w} \rangle',$$

  luego V es una representación unitaria para $\langle , \rangle'$.

- En este caso, sólo haremos uso de que k es un cuerpo de característica cero (para dividir por $|G|$). Sea $W \subset V$ invariante, y sea $p \colon V \to W$ un proyector (i.e., $p^2 = p$) de imagen W . Consideremos

  $$p'(\mathbf{v}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sigma \cdot p(\sigma^{-1} \cdot \mathbf{v}).$$

  Entonces $p' \colon V \to W$ también es un proyector. Aún más, $\ker p'$ es invariante. En efecto, si $\mathbf{v} \in \ker p'$, es $p'(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Tenemos que probar que $p'(\tau \mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo $\tau \in G$. Pero se tiene la igualdad

  $$p'(\tau \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \sigma \cdot p(\sigma^{-1} \tau \cdot \mathbf{v}).$$

  Renombrando $\lambda^{-1} = \sigma^{-1} \tau$, se puede escribir

  $$p'(\tau \mathbf{v}) = \frac{1}{|G|} \sum_{\lambda \in G} \tau \lambda p(\lambda^{-1} \mathbf{v}) = \frac{1}{|G|} \tau p'(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

  Finalmente, como p' es un proyector, se tiene $V = \operatorname{Img} p' \oplus \ker p' = W \oplus \ker p'$. Aplicando la hipótesis de inducción se tiene el resultado.

La ventaja de la primera demostración es que se puede generalizar representaciones continuas de grupos topológicos compactos en un espacio de Hilbert. La de la segunda es que funciona para un cuerpo k arbitrario de característica cero. $\square$

Lema 2.6 (De Schur). *Sean V, W dos representaciones complejas irreducibles, y $T\colon V \to W$ un homomorfismo. Entonces, ocurre una y sólo una de las posibilidades:*

- $T = 0$.
- *T es un isomorfismo*

Además, si $V = W$ y $T\colon V \to V$ no es nula, entonces $T = \lambda \operatorname{id}_V$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración. La primera parte del Lema es evidente por ser V y W dos $k[G]$-módulos simples. Veamos la segunda parte. Sea λ un autovalor de T. Entonces, $T - \lambda \operatorname{id}\colon V \to V$ es un homomorfismo que no es isomorfismo. Por la primera parte del Lema, ha de ser $T - \lambda \operatorname{id} = 0$. $\square$

Corolario 2.7 (Unicidad de la descomposición). *Sea V una representación completamente reducible, y escribamos*

$$V \simeq V_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{a_r}, \qquad V \simeq W_1^{b_1} \oplus \cdots \oplus W_s^{b_s},$$

de forma que V_i, W_j sea irreducibles, y $V_i \not\simeq V_j$, $W_i \not\simeq V_j$, para $i \neq j$. Entonces, $r = s$, (reordenando si se precisa), $V_i \simeq W_i$ y $a_i = b_i$.

Demostración. Del Lema de Schur se sigue que si $T\colon V \to V$ es un isomorfismo, entonces envía el sumando $V_i^{a_i}$ en aquel sumando $W_j^{b_j}$ para el cual $V_i \simeq W_j$. Tomando T como la identidad de V en V, obtenemos las identificaciones que queremos. $\square$

Observación 2.8. *Si G es abeliano, las representaciones irreducibles son de dimensión* 1 *(ejercicio para el lector).*

3 Caracteres

El objetivo principal de esta sesión es demostrar que existe un número finito y determinado de representaciones irreducibles de un grupo finito G.

Sean G un grupo finito y (V, ρ) una representación de G.

Definición 3.1. *Llamaremos carácter de V a la función $\chi_V\colon G \to \mathbb{C}$, tal que $\chi_V(g) = \operatorname{tr}(\rho(g))$, donde* tr *denota a la traza de $\rho(g) \in GL(V)$.*

Nótese que en el caso particular en que V es un espacio vectorial de dimensión 1 el concepto de carácter de V coincide con el de carácter de un grupo en el grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$, y por tanto es, además, un homomorfismo de grupos.

Definición 3.2. *Llamaremos funciones de clase de G en $\mathbb{C}$ a los elementos del conjunto*

$$\mathrm{CG} = \left\{\alpha \colon G \to \mathbb{C} \quad | \quad \alpha(hgh^{-1}) = \alpha(g), \quad \textit{para } g,\, h \in G\right\}.$$

No es difícil comprobar que CG tiene estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita. Más concretamente $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{CG})$ es igual al número de clases de conjugación.

Obsérvese también que los caracteres son funciones de clase ya que $\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g)$, por ser ésta una propiedad verificada por la traza.

Lema 3.3. *Sean V y W dos representaciones de G.*

1. $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$.
2. $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$.
3. $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$.

Se entiende que las igualdades se dan "puntualmente", es decir, en cada $g \in G$.

Demostración. Los apartados 1 y 2 se dejan como ejercicio para el lector. En ambos casos la solución se puede obtener, tras fijar debidamente una base de V, sin más que estudiar las matrices automorfismos $\rho(g)$. Obviamente una demostración donde no fuese necesario fijar una base de V es mucho más elegante. Esto último es siempre posible usando la definición intrínseca de traza (cf. Bourbaki.)

3. Sea $g \in G$, entonces $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$ y $\rho^*(g) \in \mathrm{GL}(V^*)$. Como $\rho^*(g) = \rho(g^{-1})^t$, se sigue que

$$\chi_{V^*}(g) = \mathrm{tr}\left(\rho(g^{-1})^t\right) = \mathrm{tr}\left(\rho(g^{-1})\right).$$

Por tratarse G de un grupo finito tenemos que g tiene orden finito n, y por tanto que $\rho(g)^n = \mathrm{id}_V$. Luego si λ es un autovalor de $\rho(g)$ es $\lambda^n = 1$ y, como $\lambda\overline{\lambda} = 1$, sigue que $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$. De este razonamiento se deduce que

$$\mathrm{tr}\left(\rho(g^{-1})\right) = \overline{\mathrm{tr}\left(\rho(g)\right)} = \overline{\chi_V(g)},$$

y por tanto la igualdad buscada. □

4 Invariantes

Para cualquier representación V de un grupo (finito) G, definimos el subespacio vectorial

$$V^G = \{\mathbf{v} \in V \quad | \quad g\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad \text{para } g \in G\} \subseteq V.$$

Nos proponemos encontrar un método explícito para calcular V^G.

Ejemplo 4.1. *Sean V y W dos representaciones de G. Sabemos que* $\mathrm{Hom}(V,W)$ *asimismo es una representación de G, luego tiene perfecto sentido considerar el subespacio vectorial* $\mathrm{Hom}(V,W)^G$*. En este caso, se comprueba fácilmente que éste es exactamente* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(V,W)$*. En efecto, basta tener en cuenta que para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,W)^G$ es $g = g\varphi = g\varphi g^{-1}$, para todo $g \in G$. Por consiguiente, los morfismos en* $\mathrm{Hom}(V,W)^G$ *son los homomorfismos de representaciones de G o, equivalentemente, los homomorfismos de $\mathbb{C}[G]$-módulos.*

Obsérvese que para cualquier representación V de G, el endomorfismo $\rho(g)\colon V \to V$ no es, en general, un homomorfismo de $\mathbb{C}[G]$-módulos. En cambio, si tomamos la *media* de todos estos endomorfismos, es decir,

$$\varphi = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g) \in \mathrm{End}(V),$$

entonces el endomorfismo φ es $\mathbb{C}[G]$-lineal pues $\sum g = \sum hgh^{-1}$. De hecho, se tiene:

Proposición 4.2. *Sea V una representación de un grupo finito G. El endomorfismo φ definido anteriormente verifica:*

- *φ es un morfismo de representaciones de G.*
- $\mathrm{Img}\,\varphi = V^G$.
- $\varphi^2 = \varphi$.

Demostración. La prueba de este resultado es un sencillo ejercicio. □

Como consecuencia inmediata de este resultado obtenemos que V^G es sumando directo de V (como representación), que $V^G \simeq \mathbb{C}^r$ (como representación trivial) y por el teorema de Unicidad de la Descomposición, que en el resto de los factores invariantes no pueden aparecer representaciones triviales. En resumen tenemos que

$$V = V^G \oplus (\text{representaciones no triviales})\,.$$

Además, la dimensión de V^G tiene un doble significado: por un lado coincide con la traza de φ, que en este caso es $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g)$ (pues la traza conmuta con sumas), y por otro es la multiplicidad de la representación trivial en V.

Este último concepto de multiplicidad corresponde a una situación algo más general:

Definición 4.3. *Si W es una representación irreducible y V es una representación arbitraria, entonces la multiplicidad de W en V, $\mathrm{m}(V,W)$ es el mayor entero $a \geq 0$ tal que en la descomposición de V como suma de irreducibles aparece W^a.*

La definición tiene sentido por el teorema de Unicidad de la Descomposición, y como se verá en breve existe una fórmula explícita en términos de los caracteres de W y V para la múltiplicidad de W en V.

Lema 4.4. *Si W es una representación irreducible y V es una representación cualquiera, entonces la multiplicidad de W en V es igual a*

$$\mathrm{m}(V,W) = \dim\left(\mathrm{Hom}\,(W,V)^G\right).$$

Demostración. Sea $V = V_1^{a_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{a_r}$ la descomposición en representaciones irreducibles. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $W = V_1$, y por tanto tenemos que la multiplicidad de W en V es a_1. Por otro lado, sabemos que $\mathrm{Hom}(W,V)^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(W,V)$, y como Hom es un funtor aditivo, se sigue que $\mathrm{Hom}(W,V)^G = \oplus_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(W,V_i)$. Finalmente, del Lema de Schur sigue que $\oplus_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(W,V_i) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(W,V_1) \cong \mathbb{C}^{a_1}$. □

Corolario 4.5. *Si W es una representación irreducible y V es una representación cualquiera, entonces la multiplicidad de W en V es igual a*

$$\mathrm{m}(W,V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_W(g)}\chi_V(g).$$

Demostración. Como $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}\,(W,V) \cong W^* \otimes_{\mathbb{C}} V$ y

$$\dim\left(\mathrm{Hom}\,(W,V)^G\right) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,V)}(g),$$

se tiene, por el lema anterior, que la multiplicidad de W en V es

$$\mathrm{m}(W,V) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_{W^*\otimes_{\mathbb{C}} V}(g).$$

Aplicando ahora los apartados 2 y 3 del Lema 3.3, se obtiene la igualdad buscada. □

Notación 4.6. *En el conjunto de funciones de clase,* CG*, definimos el producto hermítico*

$$\langle \alpha, \beta\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\alpha(g)}\beta(g).$$

Vimos, en la sección anterior, que los caracteres son funciones de clase. Así, por el corolario 4.5, la multiplicidad de W en V se puede entender como $\langle \chi_W, \chi_V\rangle$.

Con la notación introducida tenemos los siguientes resultados inmediatos:

Corolario 4.7. *Si V es una representación irreducible, entonces $\langle \chi_V, \chi_V\rangle = 1$.*

Corolario 4.8. *Si V, W son representaciones irreducibles, entonces*

$$\langle \chi_V, \chi_V\rangle = \begin{cases} 1 & si\ V \simeq W, \\ 0 & si\ V \not\simeq W. \end{cases}$$

Corolario 4.9. *El número de representaciones irreducibles de G es menor o igual que* $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{CG})$.

Notación 4.10. *Denotaremos por $\hat{G}$ al conjunto (finito) de las clases de isomorfía de representaciones irreducibles de G.*

En lo que resta de sección se pretende demostrar que el número de representaciones irreducibles de G no es sólo menor o igual que $\dim_{\mathbb{C}}(\mathrm{CG})$ sino que es siempre una igualdad.

Sea $R = \mathbb{C}^G$, una base de R es $\{e_\sigma\}_{\sigma\in G}$ donde

$$e_\sigma(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau, \\ 0 & \text{si } \sigma \neq \tau. \end{cases}$$

Tomemos $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(R)$ tal que $\rho(g)(e_\sigma) = e_{g\sigma}$. Se tiene que R es una representación de G, la llamada represetación regular o adjunta de G (veáse el Ejemplo 1.10.)

En vista de la definición de ρ se tiene que la matriz de $\rho(g)$ consiste en una permutación en las filas de la matriz identidad, de donde se deduce trivialmente que

$$\chi_R(g) = \mathrm{tr}\,(\rho(g)) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq 1_G, \\ |G| & \text{si } g = 1_G. \end{cases}$$

De la fórmula del Corolario 4.5 se obtiene que si V es una representación irreducible cualquiera, entonces la multiplicidad de V en R es

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(V,R) &= \langle \chi_V, \chi_R \rangle \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_V(g)}\chi_R(g) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \overline{\chi_V(g)}|G| \\ &= \sum_{g\in G} \overline{\chi_V(g)} \\ &= \chi_{V^*}(1_G) = \dim V. \end{aligned}$$

Luego todas las representaciones irreducibles de G se pueden encontrar como subrepresentaciones en R. De hecho se tiene algo más concreto: cualquier representación irreducible V de G aparece en R con multiplicidad $\dim V$. Así,

$$|G| = \dim R = \sum_{V\in\hat{G}} (\dim V)^2\,.$$

Sean V un representación cualquiera de G y α una función de G en $\mathbb{C}$. Definimos $\varphi_{\alpha,V} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ como $\varphi_{\alpha,V} = \sum_{g\in G}\alpha(g)\rho(g)$. Con esta definición, si $\alpha \in \mathrm{CG}$, entonces se comprueba fácilmente que $\varphi_{\alpha,V}$ es un morfismo de representaciones.

Teorema 4.11. *Sean $V_1, \ldots, V_r$ las distintas representaciones irreducibles de G. Entonces $\{\chi_{V_1}, \ldots, \chi_{V_r}\}$ es una base ortonormal (para $\langle , \rangle$) de* $\mathrm{C}G$.

Demostración. Por el corolario 4.8 y el lema de Schur, tenemos que $\langle \chi_{V_i}, \chi_{V_j} \rangle = \delta_{i,j}$. Por consiguiente, basta demostrar que $\{\chi_{V_1}, \cdots, \chi_{V_r}\}^{\perp} = \{0\}$, pues por un corolario anterior ya tenemos que $\langle V_i, V_i \rangle = 1$, para todo i.

Sea $\alpha \in \{\chi_{V_1}, \cdots, \chi_{V_r}\}^{\perp}$. Entonces, por el lema de Schur, $\varphi_{\alpha,V_i} = \lambda_i \operatorname{id}_{V_i}$ y

$$\lambda_i = \frac{1}{\dim V_i} \operatorname{tr}(\varphi_{\overline{\alpha},V_i}) = \frac{1}{\dim V_i} \sum_{g \in G} \overline{\alpha}(g) \chi_{V_i}(g) = \frac{|G|}{\dim V_i} \langle \alpha, \chi_{V_i} \rangle.$$

Por ser $\alpha \in \{\chi_{V_1}, \ldots, \chi_{V_r}\}^{\perp}$, se sigue que el último término de esta cadena de igualdades es cero, y por tanto que $\lambda_i = 0$. Luego $\varphi_{\alpha,V_i} = 0$, y esto implica que $\varphi_{\alpha,V} = 0$ para todo V, puesto que $\varphi_{\alpha,V \oplus W} = \varphi_{\alpha,V} \oplus \varphi_{\alpha,W}$.

Tomando ahora la representación regular (R, ρ_R), se obtiene que $\varphi_{\alpha,R} = 0$ de donde se deduce que

$$\sum_{g \in G} \alpha(g) \rho_R(g) = 0.$$

Finalmente, en el caso de la representación regular se tiene que $\{\rho_R(g)\}_{g \in G}$ una familia linealmente independiente es $\alpha(g) = 0$ para todo $g \in G$, por consiguiente $\alpha = 0$. ☐

Evidentemente este último teorema demuestra la igualdad en el corolario 4.9.

Corolario 4.12. $|\hat{G}| = \dim \mathrm{C}G$.

5 Varia

Ejemplo 5.1. *Consideremos $G = \mathfrak{S}_3$ el grupo simétrico. Hay dos representaciones irreducibles evidentes:*

1 Representación trivial, dada por $\rho\colon \mathfrak{S}_3 \to \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ tal que $\rho(g) = 1$ para todo $g \in G$.

2 La representación 'signo', dada por $\rho\colon \mathfrak{S}_3 \to \{1, -1\} \subset \mathbb{C}^*$, tal que $\rho(g) =$ signatura(g).

Hay también una tercera representación menos evidente que describimos a continuación:

3 Sea $V = \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3 \mid v_1 + v_2 + v_3 = 0\}$, y $\rho\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ dada por

$$\rho(g)(v_1, v_2, v_3) = (v_{g^{-1}(1)}, v_{g^{-1}(2)}, v_{g^{-1}(3)}).$$

Esta representación también es irreducible. Lo demostraremos restringiendo ρ a dos subgrupos de G. Sea pues $\tau = (1, 2, 3)$, y $H = \langle \tau \rangle \subset \mathfrak{S}_3$. Llamaremos $T = \tau(g)$, y tenemos $T\colon V \to V$. Como $\operatorname{ord}(\tau) = 3$, es $T^3 = \operatorname{id}_V$, *luego T es diagonalizable y tiene sus autovalores en el conjunto $\{w, w^2, w^3 = 1\}$, con $w = e^{2\pi i/3}$. Consideraremos entonces la suma directa $V = V_1 \oplus V_w \oplus V_{w^2}$, donde $V_{w^i} = \ker(w^i \operatorname{id} - T)$.*

Como se comprueba fácilmente, si $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Sin embargo, $\mathbf{v}_{w^2} = (1, w, w^2)$ es un autovector para el autovalor w^2, de forma que $\langle \mathbf{v}_{w^2} \rangle \subset V$ es estable para T.

Sea ahora $\sigma = (1, 2)$. Es evidente que $\tau\sigma = \sigma\tau^2$, luego debe verificarse que

$$T \cdot \sigma \cdot \mathbf{v} = \sigma \cdot T^2 \cdot \mathbf{v} = \sigma(w\mathbf{v}) = w\sigma(\mathbf{v}), \qquad \text{para todo } \mathbf{v} \in V_{w^2}$$

Así, si $\mathbf{v}$ es un autovector para T de autovalor w^2, entonces $\sigma\mathbf{v}$ es autovector de autovalor w (obsérvese el constante abuso de la notación), luego $\sigma V_{w^2} \subset V_w$.

Como hemos visto antes, $V_1 = 0$, luego $V = V_w \oplus V_{w^2}$. Como V es de dimensión 2, cada uno de los sumandos es de dimensión 1. Ahora bien, esta suma directa no es una suma directa de subrepresentaciones, porque $\sigma V_{w^2} \subset V_w$. Además, no hay subrepresentaciones distintas de éstas, porque han de ser estables al menos para T.

Tenemos pues tres representaciones irreducibles, y sabemos que $|G|$ es igual a la suma de las dimensiones al cuadrado de las representaciones irreducibles, luego éstas tres son todas las representaciones irreducibles de $\mathfrak{S}_3$. Puede verse una demostración independiente de este hecho en [Fulton-Harris].

6 Representación de Álgebras de Lie

Hasta ahora, hemos estudiado la Teoría de Representaciones de grupos finitos. El siguiente paso natural es abordar grupos no finitos pero con alguna propiedad que 'sustituya' la finitud, por ejemplo grupos compactos: S^1, grupos ortogonales etc.

La idea es sustituir las medias por una medida de Haar, $\mu\colon \mathcal{C}(G) \to \mathbb{C}$ lineal, con una cierta propiedad de continuidad (si $f \geq 0$, entonces $\mu(f) \geq 0$) e invariante por traslaciones, normalizada por $\nu(G) = 1$. Análogamente, se puede trabajar con representaciones en espacios de Hilbert.

Ahora bien, en el proceloso mundo de los grupos, existen otros grupos infinitos no compactos que son ciertamente 'interesantes': $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, etc. Estos grupos están dotados de la estructura de grupos de Lie, de forma que el siguiente paso natural es estudiar la representación de álgebras de Lie (se deja para el lector el ejercicio de definir 'natural'.)

Definición 6.1. *Un álgebra de Lie (para $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) es un k-espacio vectorial $\mathfrak{g}$, con una aplicación $[,]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ bilineal, antisimétrica (esto es, $[a, b] = -[b, a]$) y que verifica la identidad de Jacobi:*

$$\big[a, [b, c]\big] + \big[b, [c, a]\big] + \big[c, [a, b]\big] = 0.$$

Ejemplo 6.2. *El ejemplo más sencillo de álgebra de Lie es cualquier k-álgebra R con $[r,s] = rs - sr$.*

Otro ejemplo es $\mathfrak{gl}(n,k) = M(n \times n, k)$ (con la estructura de k-álgebra) y su subálgebra de Lie $\mathfrak{sl}(n,k)$ cuyos elementos son las matrices de $\mathfrak{gl}(n,k)$ con traza cero.

Definición 6.3. *Una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un par (V,ρ) tal que V es un k-espacio vectorial y $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) = \mathrm{End}(V)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie (i.e., compatibles con $[,]$.)*

Si $x \in \mathfrak{g}$ y $\mathbf{v} \in V$, se nota $x \cdot \mathbf{v} = \rho(x)(\mathbf{v})$ y $[x,y] \cdot \mathbf{v} = x \cdot (y \cdot \mathbf{v}) - y \cdot (x \cdot \mathbf{v})$.

Definición 6.4. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Se define su álgebra envolvente como el par (U,ν), donde U es una k-álgebra, $\nu\colon \mathfrak{g} \to U$ un homomorfismo de álgebras de Lie tales que verifican la siguiente propiedad universal: para toda álgebra R y para todo homomorfismo de álgebras de Lie $\mu\colon g \to R$, existe una factorización única $\mu = h\nu$, donde $h\colon U \to R$ es homomorfismo de álgebras.*

Con esta definición, una representación de $\mathfrak{g}$, es un módulo sobre su álgebra envolvente, análogamente al caso de los grupos finitos y los $k[G]$-módulos.

Definición 6.5. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Se definen*

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \big\{\delta\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \quad \textit{lineales} \quad | \quad \delta\big([x,y]\big) = \big[\delta(x), y\big] + \big[x, \delta(y)\big]\big\} \subset \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

el subálgebra de Lie de las derivaciones de $\mathfrak{g}$, y

$$\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$$

dada por $\mathrm{ad}(x)(y) = [x,y]$, es decir, $\mathrm{ad}(x) = [x,-]$. La aplicación ad *es un homomorfismo de álgebras de Lie y define por tanto una representación* $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, *que se denomina* representación adjunta.

6.1 Representaciones de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$

Sea

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}\,(2,\mathbb{C}) = \{A \in \mathcal{M}\,(2 \times 2, \mathbb{C}) \ \ | \ \ \mathrm{tr}(A) = 0\}\,.$$

Se puede comprobar que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie simple, es decir, que no tiene ideales propios, y además que está generada por:

$$\mathfrak{g} = \left\langle H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

con el "producto corchete" definido de la siguiente manera:

$$[X,Y] = H,\ [H,X] = 2X,\ [H,Y] = -2Y.$$

Recordamos que la representación adjunta de $\mathfrak{g}$ no es más que $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{gl}(\mathfrak{g}) (:= \mathrm{End}(\mathfrak{g}))$ donde $\mathrm{ad}(x)(y) = [x,y]$. Por ser $\mathfrak{g}$ simple, el homomorfismo de álgebras de Lie ad es inyectivo.

En esta sección nos planteamos dar la lista completa de representaciones irreducibles (de dimensión finita) de $\mathfrak{g}$. En primer lugar tenemos:

Teorema 6.6. *La descomposición de Jordan de los elementos de un álgebra de Lie semisimple (suma directa de un número finito de simples) es intrínseca.*

La prueba de este teorema se puede consultar por ejemplo en [Fulton-Harris].

Se recuerda que el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ no es semisimple.

Más que centrarnos en la demostración del teorema, merece la pena aclarar qué entendemos por "ser intrínseca": consideramos dos representaciones (V,ρ) y (W,σ) de $\mathfrak{g}$. La descomposición de Jordan de $\rho(x)$ y $\sigma(x)$ es suma de un endomorfismo diagonalizable (es decir, semisimple) y otro nilpotente que conmutan, para cada $x \in \mathfrak{g}$.

$$\left.\begin{array}{rcl} \rho(x) & = & \rho(x)_{\mathrm{s}} + \rho(x)_{\mathrm{n}}; \\ \sigma(x) & = & \sigma(x)_{\mathrm{s}} + \sigma(x)_{\mathrm{n}}. \end{array}\right\} \forall x \in \mathfrak{g}.$$

El teorema afirma que existen unos únicos x_{s} y x_{n} en $\mathfrak{g}$ tales que $x = x_{\mathrm{s}} + x_{\mathrm{n}}$, $[x_{\mathrm{s}}, x_{\mathrm{n}}] = 0$ y

$$\left\{\begin{array}{rclcrcl} \rho(x)_{\mathrm{s}} & = & \rho(x_{\mathrm{s}}), & & \sigma(x)_{\mathrm{s}} & = & \sigma(x_{\mathrm{s}}) \\ \rho(x)_{\mathrm{n}} & = & \rho(x_{\mathrm{n}}), & & \sigma(x)_{\mathrm{n}} & = & \sigma(x_{\mathrm{n}}) \end{array}\right.$$

Un elemento x es semisimple (nilpotente, resp.) si $x_{\mathrm{s}} = x$ ($x_{\mathrm{n}} = x$, resp.). En resumen, la descomposición de Jordan de los elementos de un álgebra de Lie semisimple sólo depende de $\mathfrak{g}$.

En particular, tomando la representación evidente $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ concluimos que H es semisimple y X, Y son nilpotentes.

Sea (V,ρ) una representación compleja de dimensión finita de $\mathfrak{g}$. Por el teorema anterior $\rho(H)$ es semisimple (suma directa de subespacios propios, i.e. diagonalizable): $V = \oplus V_\lambda$, donde λ recorre el conjunto de los autovalores de $\rho(H)$ y $V_\lambda = \ker(\rho(H) - \lambda\,\mathrm{id})$.

Si $\mathbf{v} \in V_\lambda$, se dice que $\mathbf{v}$ es un vector de peso λ, en este caso

$$\lambda\,(X\mathbf{v}) = X(\lambda\mathbf{v}) = XH\mathbf{v} = [H,X]\,\mathbf{v} + HX\mathbf{v} = -2X\mathbf{v} + HX\mathbf{v}.$$

Por consiguiente $H(X\mathbf{v}) = (\lambda+2)(X\mathbf{v})$, de donde se deduce que $X\mathbf{v}$ es un autovector de H de peso $\lambda+2$. Es decir, $XV_\lambda \subseteq V_{\lambda+2}$, y análogamente $YV_\lambda \subseteq V_{\lambda-2}$. Luego, todos los autovalores que aparecen en la descomposición de Jordan son congruentes módulo 2.

Definición 6.7. *Un vector* $\mathbf{e} \in V \setminus \{0\}$ *es primitivo de peso* λ *si:*

- $He = \lambda e$.
- $Xe = 0$.

Más adelante veremos que esta definición no depende de la elección de H y X.

Lema 6.8. *El conjunto de elementos primitivos es no vacío.*

Demostración. Sea $\mathbf{x} \in V_\lambda \backslash \{0\}$. Como X es nilpotente, entonces $\mathbf{x}, X\mathbf{x}, X^2\mathbf{x}, \ldots, X^r\mathbf{x} \neq 0, X^{r+1}\mathbf{x} = 0$. Luego $\mathbf{e} = X^r\mathbf{x}$ es primitivo de peso $\lambda + 2r$. $\square$

Teorema 6.9. *Sea* $\mathbf{e}$ *elemento primitivo de peso* λ. *Si* $\mathbf{e}_n = \frac{Y^n\mathbf{e}}{n!}$ *para cada* $n \geq 0$ *(por convenio se fija* $\mathbf{e}_{-1} = 0$*), entonces:*

1) $H(\mathbf{e}_n) = (\lambda - 2n)\,\mathbf{e}_n,\ \forall n \geq 0.$

2) $Y(\mathbf{e}_n) = (n+1)\,\mathbf{e}_{n+1},\ \forall n \geq 0.$

3) $X(\mathbf{e}_n) = (\lambda - n + 1)\,\mathbf{e}_{n-1},\ \forall n \geq 0.$

Demostración. Se deja como ejercicio para el lector.
(Indicación: Por inducción sobre n, teniendo en cuenta que $\mathbf{e}_n = \frac{Y\mathbf{e}_{n-1}}{n}$.) $\square$

Consecuencias.- Si todos los $\{e_n\}_{n\geq 0}$ son distintos de cero, entonces tienen pesos distintos. De donde se obtiene que V es suma directa infinita de los V_λ, lo que supone una evidente contradicción. Así, podemos afirmar que existe un entero positivo m tal que $e_i = 0,\ \forall i > m$ y $e_m \neq 0$.

Aplicando 3) vemos que $0 = X\,(e_{m+1}) = (\lambda - m)\,e_m$, lo que implica $\lambda = m$ y por tanto que el peso de cualquier elemento primitivo es siempre un entero. De hecho se tiene que todos los pesos son enteros.

De 2) se deduce que todos los $e_i,\ i < m$ son distintos de cero y que $\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_m$ son linealmente independientes. Así, $W := \langle \mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle$ es un subespacio invariante, equivalentemente una subrepresentación de álgebras de Lie. Es irreducible porque si tomamos una subrepresentación W' de W, entonces $H_{|W'}$ es semisimple, pero $\{\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_m\}$ es la base semisimple de H. Por lo tanto, $H_{|W'}$ tiene los autovalores de $H_{|W}$. Así $\mathbf{e}_i \in W'$, y entonces, por 2), también están los $\mathbf{e}_{i+1}, \ldots, \mathbf{e}_m$ y por 3) los $\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_{i-1}$. Luego $W = W'$.

Sean $\mathbf{e}$ y $\mathbf{e}'$ dos vectores primitivos de peso m y m', respectivamente. Mediante el razonamiento anterior obtenemos dos representaciones irreducibles W y W' de $\mathfrak{g}$. Si m y m' no son iguales, entonces las representaciones forzosamente han de ser distintas, es más, se puede ver que el único homomorfismo de representaciones entre W y W' es el cero. En cambio si $m = m'$, entonces W es isomorfa a W'. En efecto, basta considerar cualquier isomorfismo de $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$-módulos que lleve $\mathbf{e}$ en $\mathbf{e}'$. (¿Lema de Schur?) Luego el subespacio invariante W depende exclusivamente (salvo isomorfismo) del peso del vector primitivo elegido. Sea $W_m = \langle \mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle$, para cada entero positivo m.

Todas las representaciones irreducibles son de este tipo. En efecto, acabamos de ver que para cualquier vector primitivo $\mathbf{e}$ de peso m se obtiene una representación irreducible isomorfa a W_m.

Teorema 6.10. *Toda representación compleja de dimensión finita de* $\mathfrak{g}$ *es suma directa de representaciones del tipo* W_m.